ОБ ОДНОЙ АЛГОРИТМИЧЕСКИ НЕРАЗРЕШИМОЙ ПРОБЛЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ И РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

С. А. Абрамов (Москва, Россия)

Ж.-А. Вейлем доказана невозможность алгоритма, который бы для произвольного дифференциального уравнения вида $\sum_{i=0}^{m} r_i(x, t_1, \ldots, t_n)\ y^{(i)}(x) = 0$, где x — независимая переменная, $t_1, \ldots, t_n$ — параметры, $r_0(x, t_1, \ldots, t_n)$, $\ldots$, $r_m(x, t_1, \ldots, t_n)$ — рациональные функции с целочисленными коэффициентами, отвечал на вопрос, существуют ли числовые значения параметров $t_1, \ldots, t_n$, при которых уравнение имеет решение в виде ненулевой рациональной функции от x. Доказательство Ж.-А. Вейля, опирающееся на известную теорему Ю.В. Матиясевича ([1]), приведено в статье Д. Буше [2] (сам Ж.-А. Вейль свой результат не публиковал). Это доказательство легко модифицируется для полиномиальных решений. Однако оно не переносится непосредственно на случай разностных уравнений. Предлагается доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Невозможен алгоритм, который бы для произвольного уравнения вида* $\sum_{i=0}^{m} r_i(x, t_1, \ldots, t_n) y(x+i) = 0$, *где* x — *независимая переменная,* $t_1, \ldots, t_n$ — *параметры,* $r_0(x, t_1, \ldots, t_n)$, $\ldots$, $r_m(x, t_1, \ldots, t_n)$ — *рациональные функции с целочисленными коэффициентами, отвечал на вопрос, существуют ли числовые значения параметров* $t_1, \ldots, t_n$, *при которых уравнение имеет решение в виде ненулевой рациональной функции от* x. *Утверждение остается справедливым и для полиномиальных решений.*

Идея доказательства. Пусть $P(t_1, \ldots, t_n)$ — произвольный полином указанных переменных с целочисленными коэффициентами. Разностное уравнение первого порядка

$$x^{n+1} y(x+1) - \left(x + \frac{1}{1 + P^2(t_1, \ldots, t_n)}\right)(x+t_1)(x+t_2)\ldots(x+t_n)\ y(x) = 0$$

имеет при некоторых числовых значениях параметров решение в виде ненулевой рациональной функции (полинома) если и только если значения $t_1, \ldots, t_n$ суть целые (неотрицательные целые) и $P(t_1, \ldots, t_n) = 0$ для этих значений.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ, грант 07-01-00482. Автор признателен Ж.-А. Вейлю (Лиможский университет) за интересные беседы по теме этой статьи.

Литература

1. Матиясевич Ю.В. *Десятая проблема Гильберта.* М: Наука, “ФИЗМАТЛИТ”, 1993.

2. Boucher D. *About the Polynomial Solutions of Homogeneous Linear Differential Equations Depending on Parameters* // Proc. ISSAC’99, 1999, P. 261–268.